Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie.
Promotion: 1^{ière} année Master "Hydrogéologie et environnement".
Corrégé type de l'examen en mathématique, 2023 -2024.

Exercise 1 *On considère la matrice A définie par:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer $A^3 - A$).*

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .....(01poin

$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ .....(01poin

$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$.....(01point)

2. En déduire que A est inversible.
$A^3 - A = 4I_3 \Leftrightarrow A[A^2 - I_3] = 4I_3 \Leftrightarrow A[\frac{1}{4}(A^2 - I_3)] = I_3$
$\Leftrightarrow AA^{-1} = I_3$
alors A inversible et $A^{-1} = [\frac{1}{4}(A^2 - I_3)]$.....(01.point)
3.Calculer A^{-1}.
$A^{-1} = [\frac{1}{4}(A^2 - I_3)] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .....(02.points)

Exercise 2 *Soit le système d'équations linéiares d'inconnues x, y et z :*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 7 \\ 3x + 2y - z = 10 \end{cases}$$

1. Récrire le système sous la forme matricielle $AX = B$.
la forme matricielle $AX = B$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ .....(01.point)
2. Calculer $\det(A)$, et déduire que A inversible.
par la première ligne
$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 1$.....(01.point)
comme $\det(A) \neq 0$ alors A inversible.....(0.5.point)
3. Calculer A^{-1}.

par méthode de Com(A) on a:
$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{Com}(A))^t$

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} \left|\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right| & -\left|\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right| & \left|\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right| \\ -\left|\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right| & \left|\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right| & -\left|\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right| \\ \left|\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right| & -\left|\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right| & \left|\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{....(02.point)}$$

$$[\text{Com}(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{.....(01.point)}$$

4. Résoudre le système à l'aide de A^{-1}.

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \text{.....(03.point)}$$

Exercise 3

On considère la matrice A définie par:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.:
Le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \\ P_A(\lambda) &= 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \text{.....(02.points)} \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $\{1, 3\}$
Les vecteurs propres de A :.....(02.points)

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / (A - I_2)X = 0 \right\} \\ E_1 &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ E_1 &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x = -y \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / (A - 3I_2)X = 0 \right\} \\ E_3 &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ E_1 &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x = y \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

2. A est une matrice carrée d'ordre 2, et elle admet deux valeurs propres distingues donc elle est diagonalisable.....(0.5.point)

Une matrice P qui diagonalise A est:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{.....(01.point)}$$